Spezielle Funktionen   Ac 07-2024

Im folgenden werden spezielle Funktionen und ihre computermäßige Berechnung betrachtet:
Normalverterilung , erf, gamma, etc.

Normalverteilung φ und Gaußsche Integralfunktion Φ (Fehlerintegral)

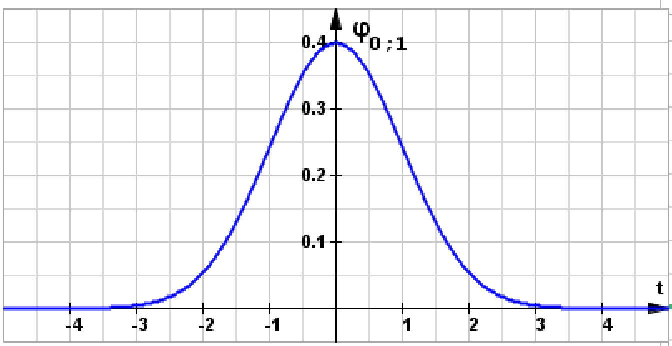
$$\varphi_{\mu,\sigma}(\mathrm{t}) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; \quad t,\mu \in \mathbb{R} \; ; \; \sigma \in \mathbb{R}_+^*$$

Dichte der Normalverteilung

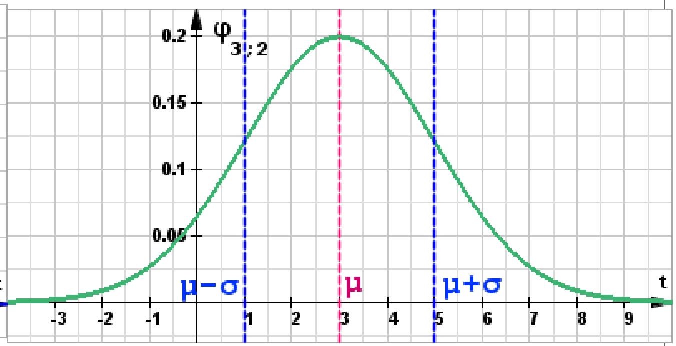
für $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 1$ ergibt sich die sog. Standard-Normalverteilung

Die Normalverteilung ist eine **Näherungsformel** für die Binomialverteilung für sehr große n .
Statt Normalverteilung spricht man auch von der Dichte(funktion) der Normalverteilung.

Dichte der Standard-Normalverteilung



Dichte der Normalverteilung $\varphi_{3;2}$



Für die effektive Berechnung der Normalverteilung φ kann man die üblichen Funktionen des Taschenrechners oder der Programmiersprache (**exp** etc.) verwenden.

Die **Wahrscheinlichkeit** der Normalverteilung wird über Flächeninhalte zwischen Graph und t-Achse bestimmt (s. unten):

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Normalverteilung (für das Integral gibt es keine Stammfunktion !)

$$\phi_{\mu,\sigma}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \quad ; \quad x,t,\mu \in \mathbb{R} \; ; \; \sigma \in \mathbb{R}_+^*$$

für $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ ergibt sich die sog. Gaußsche Integralfunktion ; Gaußsches Fehlerintegral

Es gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mu;\sigma}(t)\, dt = 1$, was der Wahrscheinlichkeitsdefinition entspricht

Für die effektive (schnelle und genaue) Berechnung der Gaußschen Integralfunktion Φ kann man numerische Integration verwenden.

Es gibt jedoch auch Näherungsformeln, die von der sog. “Fehlerfunktion” **erf** abhängen (s.u.):

$$\Phi\,(x) = 0{,}5 \cdot (\, 1 + \mathrm{erf}(x / \sqrt{2}\,)$$

Die Fehlerfunktion „erf (x)“ :

In der Stochastik verwendet man u.a. eine sog. „**error function**“ namens **erf (x)**. Diese ist nicht identisch mit dem hier betrachteten Gaußschen Fehlerintegral, es gibt aber einen Zusammenhang .

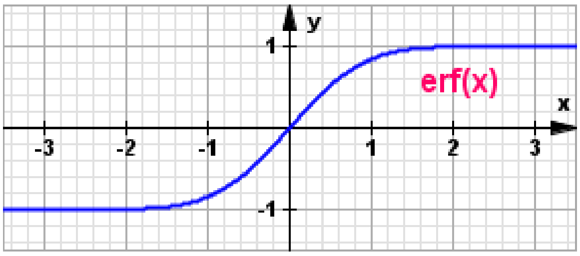
erf(x) gibt den prozentualen Anteil derjenigen Messwerte an, die zwischen 0 und x liegen (also zu groß sind), aber um weniger als x vom wahren Wert abweichen.

Definition:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{x^{2i+1}}{(2i+1) \cdot i!}$$

erf (x) ist eine ungerade Funktion, also gilt:
erf (-x) = - erf (x)

Grafik für erf (x) :

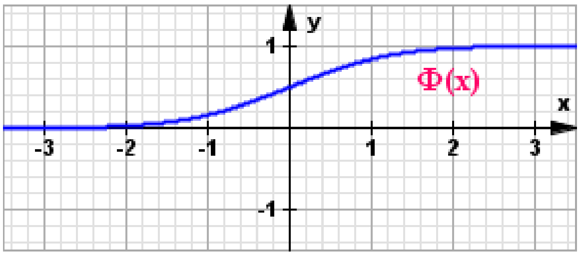


Zwischen der Fehlerfunktion und dem Fehlerintegral ist folgender Zusammenhang gegeben:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-0,5t^2} dt \ = \frac{1}{2} \cdot erf(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-0,5t^2} dt \ = \frac{1}{2} \cdot [\, 1 + erf(\frac{x}{\sqrt{2}})]$$

Grafik für das Fehlerintegral Φ (x) :



Zur numerischen Berechnung von **erf (x)** gibt es Näherungsformeln (Fehler maximal: $1{,}2 \cdot 10^{-7}$) :

```
 t = 1 / (1 + 0.5 * |x|)
 expo = -|x|² - 1.26551223 + 1.00002368*t + 0.37409196*t² + 0.09678418*t³ - 0.18628806*t^4
+
         0.27886807*t^5 - 1.13520398*t^6 + 1.48851587*t^7 - 0.82215223*t^8 +
0.17087277*t^9
 erf(x) = t * e^expo - 1   ,  falls x >= 0
 erf(x) = 1 - t * e^expo   ,  falls x < 0
```

Von Chebychev stammt eine Formel, die eine Genauigkeit von 10^{-15} hat
(s. William H. Press: Numerical recipes C++; the art of scientific computing Third Edition 2007 Cambridge University Press)

<u>angepasst an Java von Ac:</u>

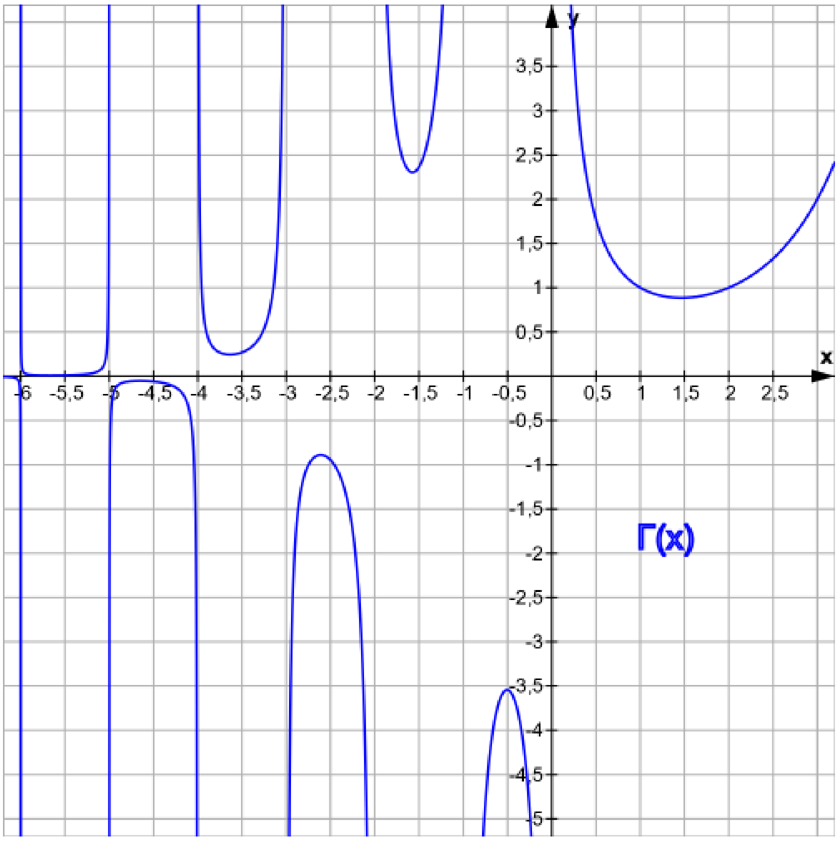
```
static private double erf(double x) {
        // berechnet  erf(x) für alle x.
        if (x >=0.)
                return 1.0 - erfccheb(x);
        else return erfccheb(-x) - 1.0;

}


static private double erfccheb(double z) { // Chebychev-Lösung ( Genauigkeit: 10^-15 )
        int j;
        double t,ty,tmp,d=0.,dd=0.;
        final double[] cof = {-1.3026537197817094, 6.4196979235649026e-1,
                        1.9476473204185836e-2,-9.561514786808631e-3,-9.46595344482036e-4,
                        3.66839497852761e-4,4.2523324806907e-5,-2.0278578112534e-5,
                        -1.624290004647e-6,1.303655835580e-6,1.5626441722e-8,-8.5238095915e-8,
                        6.529054439e-9,5.059343495e-9,-9.91364156e-10,-2.27365122e-10,
                        9.6467911e-11, 2.394038e-12,-6.886027e-12,8.94487e-13, 3.13092e-13,
                        -1.12708e-13,3.81e-16,7.106e-15,-1.523e-15,-9.4e-17,1.21e-16,-2.8e-17};
        int ncof = cof.length;
        // if (z < 0.) throw("z muss negativ sein");
        t = 2./(2.+z);
        ty = 4.*t - 2.;
        for (j = ncof-1; j>0; j--) {
                tmp = d;
                d = ty*d - dd + cof[j];
                dd = tmp;
        }
        return t*Math.exp(-z*z + 0.5*(cof[0] + ty*d) - dd);
}
```

Die Gammafunktion Γ (x) :

Die Gammafunktion ist eine Erweiterung der Fakultätsfunktion auf den Zahlenbereich $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) .

Es gilt daher für $x \in \mathbb{N}$: $\quad$ **$\Gamma(x+1) = x!$**

Die Gammafunktion ist folgendermaßen definiert: $\boxed{\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt}$



Die Grafik zeigt, dass im ganzzahligen negativen x-Bereich sowie an der Stelle x = 0 Polstellen existieren !

Für die Gammafunktion gelten folgende Beziehungen:

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \text{und} \quad \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\Gamma(x) \cdot \sin(\pi \cdot x)} = \frac{\pi \cdot x}{\Gamma(1+x) \cdot \sin(\pi \cdot x)}}$$

So ist z.B. $\Gamma(-\frac{1}{4}) = \Gamma(1-\frac{5}{4}) = \dfrac{\pi}{\Gamma(\frac{5}{4}) \cdot \sin(\pi \cdot \frac{5}{4})} = \dfrac{\pi}{\Gamma(\frac{5}{4}) \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})} = -\dfrac{\sqrt{2} \cdot \pi}{\Gamma(\frac{5}{4})}$

Diese Formel kann man z.B. bei der Berechnung von $\int_0^1 \sqrt[4]{1-x^4}\, dx$ ausnutzen:

"WolframAlpha" liefert : $-\dfrac{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(-\frac{1}{4})}$. HP Prime jedoch die wesentlich einfachere Formel: $\dfrac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{8 \cdot \sqrt{\pi}}$

Nachweis der Gleichheit: $\dfrac{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(-\frac{1}{4})} = -\dfrac{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \Gamma(\frac{5}{4})}{-\dfrac{\sqrt{2} \cdot \pi}{\Gamma(\frac{5}{4})}} = \dfrac{2 \cdot \Gamma(\frac{5}{4})^2}{\sqrt{\pi}} = \dfrac{2 \cdot (\frac{1}{4})^2 \cdot \Gamma(\frac{1}{4})^2}{\sqrt{\pi}} = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{8 \cdot \sqrt{\pi}}$

Wegen der sehr schnell steigenden Werte für die Gammafunktion werden zunächst über Näherungsformeln die natürlichen Logarithmen der Funktionswerte berechnet (anhand mehrerer Summanden) und dann das Endergebnis als Exponent von e genommen.

Auch hier liefert wieder

(s. William H. Press: Numerical recipes C++; the art of scientific computing Third Edition 2007   Cambridge University Press)

einen gut funktionierenden Algorithmus, den ich von C++ zu Java übertragen habe:

```
static private double gammaLn(double xx) {
      // berechnet den ln von Gamma(xx) für xx > 0
      // Gammafunktion g(x) = integral( t^(x-1)*e^(-t), t, 0, infinity) ; x > 0

      int j;
      double x,tmp,y,ser;
      final double[] cof = {57.1562356658629235,-59.5979603554754912,
      14.1360979747417471,-0.491913816097620199,.339946499848118887e-4,
      .465236289270485756e-4,-.983744753048795646e-4,.158088703224912494e-3,
      -.210264441724104883e-3,.217439618115212643e-3,-.164318106536763890e-3,
      .844182239838527433e-4,-.261908384015814087e-4,.368991826595316234e-5};

      //if (xx <= 0)  throw ArithmeticException ();
      y=x=xx;
      tmp = x+5.24218750000000000;   // Rational 671/128.
      tmp = (x+0.5)*Math.log(tmp)-tmp;
      ser = 0.999999999999997092;
      for (j=0; j<14; j++)
            ser += cof[j]/++y;
      return tmp+Math.log(2.5066282746310005*ser/x);
      }


static private double gamma(double x) {
      // rekursive Berechnung; dadurch auch x < 0 berücksichtigt
      // gamma(x) = gamma(x+1) / x
      return x > 0 ? Math.exp(gammaLn(x)) : gamma(x + 1) / x;
}
```

Die Digammafunktion (Psifkt.) ψ (x) :

Die Digammafunktion (ψ – Funktion) ist die logarithmische Ableitung der Gammafunktion .

Die Digammafunktion ist daher folgendermaßen definiert:

$$\boxed{\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x))}$$

Ihre Integraldarstellung lautet:

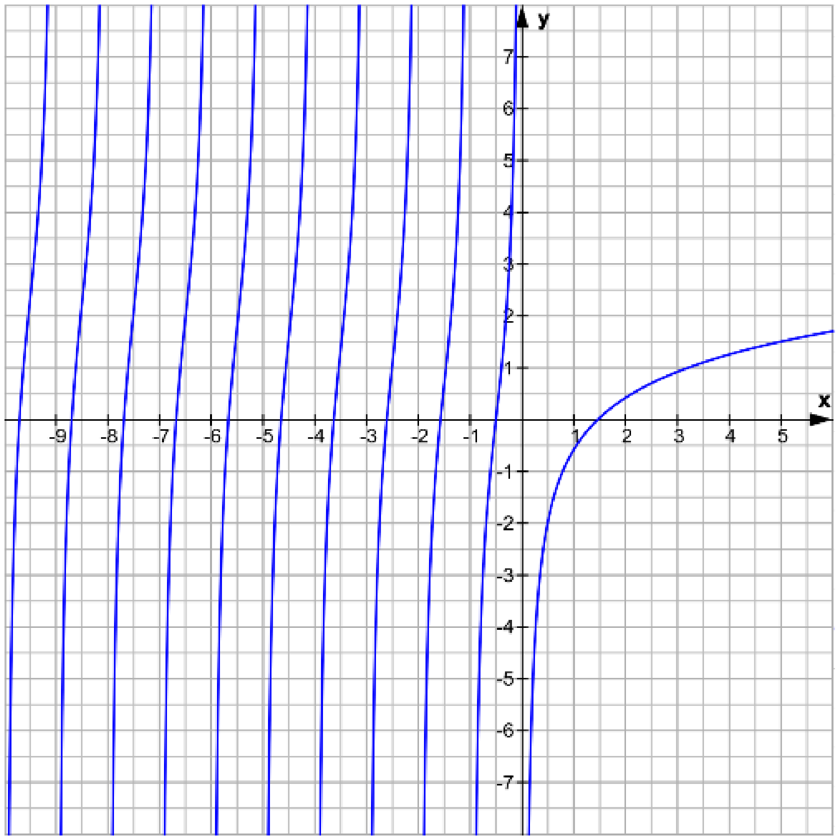
$$\boxed{\Psi(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t \cdot x}}{1-e^{-t}}\right) dt}$$

Rekursionsgleichung:

$$\boxed{\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}}$$

Anwendungen findet die Psi-Funktion in der Analytischen Zahlentheorie, der Komplexen Analysis sowie für physikalische und chemische Konstanten.

<u>Grafik</u> (Pole im ganzzahligen negativen Bereich !) :



Berechnen lässt sie sich am bequemsten als Ableitung von Ln (Γ) .

Alternative s. unten !

Der exakte Wert von ψ (1) = - γ (Euler-Mascheroni-Zahl)

Die Euler-Mascheroni-Zahl $\boldsymbol{\gamma}$ wird bei Approximationen häufig verwendet.

$\gamma \approx$ 1443039162253832151516280225206006077605398339849808997014418087... /
2500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000...
$\approx$ 0,5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672347...

Eine der Approximationen für die ψ - Funktion verwendet γ :

$$\boxed{\Psi(x) \approx -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x-1}\right) = -\gamma + (x-1) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\cdot(k+x)}}$$

Die Reihe konvergiert ziemlich langsam !

Man erkennt sofort, dass ψ (1) = - γ und ψ (2) = 1 - γ und ψ (3) = 1,5 - γ gelten !

Beispiel: x = 0,5

$$\Psi(0{,}5) \approx -\gamma - 0{,}5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\cdot(k+0{,}5)}$$

$$= -\gamma - 0{,}5 \cdot \left[\frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7{,}5} + \frac{1}{14} + \frac{1}{22{,}5} + \frac{1}{33} + \frac{1}{45{,}5} + \frac{1}{60} + \ldots\right]$$

$$\approx -\gamma - 0{,}5 \cdot 2{,}651487 \approx -0{,}5772 - 1{,}3257 \approx -1{,}903$$

Lässt man die Summe bis k = 100 laufen, so ist das Ergebnis ca. $-1{,}959$

Die Approximation von WolframAlpha liefert $-1{,}96351\ldots$

Der exakte Wert ist $-\gamma - \ln(4)$.

Die (Eulersche) Betafunktion B (x,y) :

Die Betafunktion ist eine Funktion von 2 Variablen.
Auch die Betafunktion spielt in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine bedeutende Rolle.

Die Integraldefinition ist:

$$\boxed{B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-t}\, dt \, ; \quad x,y>0}$$

Es gibt einen Zusammenhang mit der Gammafunktion $\Gamma(x)$, welchen man zur Berechnung von Funktionswerten ausnutzen kann:

$$\boxed{B(x,y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}}$$

<u>Beispiel 1:</u> B(2 , 1) :
$B(2,1) = \Gamma(2) \cdot \Gamma(1) / \Gamma(3) = 1 \cdot 1 / 2 = 0{,}5$

<u>Beispiel 2:</u> B(3 , 4) :
$B(3,4) = \Gamma(3) \cdot \Gamma(4) / \Gamma(7) = 2 \cdot 6 / 720 = 1 / 60 = 0{,}01666666\ldots$

<u>Beispiel 3:</u> B(5/2 , 7/2) :
$B(5/2 , 7/2) = \Gamma(5/2) \cdot \Gamma(7/2) / \Gamma(6) =$
Wegen $\Gamma(7/2) = 5/2 \cdot \Gamma(5/2)$ und $\Gamma(6) = 5! = 120$ ist
$B(5/2 , 7/2) = 5/2 \cdot [\Gamma(5/2)]^2 / 120 = [\Gamma(5/2)]^2 / 48 \approx 0{,}0368155\ldots$
WolframAlpha: $\Gamma(5/2) = 3/4 \cdot \sqrt{\pi} \approx 1{,}329$
$B(5/2 , 7/2) = (3\pi) / 256 \approx 0.036815538909255389513234102147806674424185578898927$